**Задача 1**.

Дана однородная Марковская цепь с данным числом состояний . Ненулевые переходные вероятности заданы в таблице.

**Задание.**

1. Выпишите матрицу переходных вероятностей

2. Изобразите размеченный граф Марковской цепи

3. Докажите, что цепь эргодическая

4. Смоделируйте вектор начальных вероятностей согласно приложенному алгоритму.

5. Вычислите безусловные вероятности состояний смоделированной цепи на шаге по формуле из лекции 1 для полученного .

6. Смоделируйте траекторий полученной цепи за шагов (см алгоритм ниже). Несколько траекторий выведите на печать.

7. По полученным реализациям траекторий найдите вектор эмпирических безусловных вероятностей состояний цепи на шаге.

8. Сравните найденные эмпирические вероятности с теоретическими для шага.

9. Вычислите финальные вероятности для рассматриваемой Марковской цепи (лекция 2) и сравните их c вероятностями состояний на шаге.

Сформулируйте выводы.

Исходные данные:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар |  | Переходные вероятности |  |  |
| 15 | 6 |  | 15 | 180 |

**Решение:**

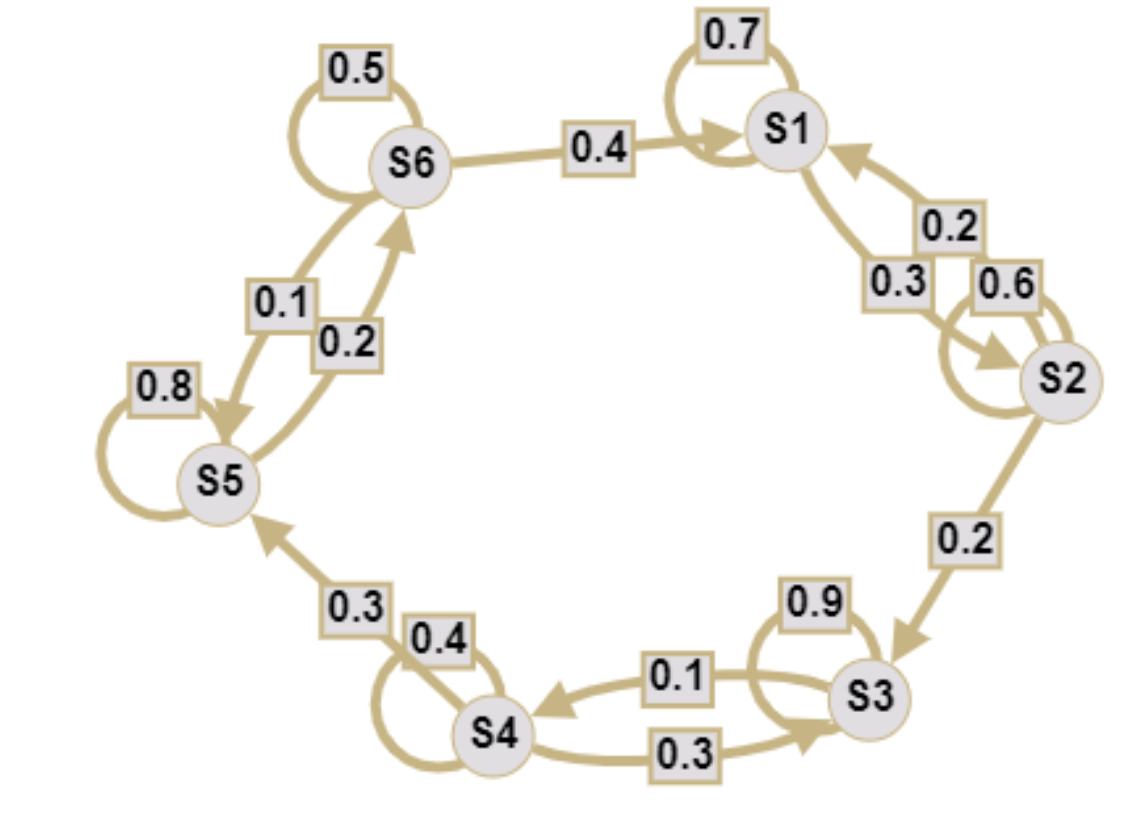
1. Выпишем матрицу переходных вероятностей

По условию:

В итоге получаем следующую матрицу переходных вероятностей:



1. Изображение размеченного графа Марковской цепи



1. Докажем, что цепь эргодическая

Марковская цепь является эргодической, если

Для доказательства эргодичности цепи воспользуемся теоремой о том, что марковская цепь эргодична, если







То есть получили, что марковская цепь эргодична и

1. Смоделируем вектор начальных вероятностей согласно приложенному алгоритму.
2. Сгенерируем вектор из независимых и равномерно распределенных на отрезке случайных величин.

m = 6

r = [0 for i in range(m - 1)]

p\_0 = [0 for i in range(m)]

for i in range(m - 1):

  r[i] = np.random.uniform(0, 1)

1. Построим вариационный ряд , то есть упорядочим по возрастанию. Найдём длины отрезков, на которые вектор разбивает отрезок , это и будет вектором начальных вероятностей

r.sort()

p\_0[0] = r[0]

for j in range(1, m - 1):

  p\_0[j] = r[j] - r[j - 1]

p\_0[m - 1] = 1 - r[m - 2]

Получили: p\_0 = [0.011859, 0.060728, 0.031704, 0.546154, 0.134335, 0.215221]

Выполним проверку для p\_0:

sum = 0

for i in range(m):

  sum += p\_0[i]

print("Проверка: ", sum)

Проверка: 1.0

1. Вычислим безусловные вероятности состояний смоделированной цепи на шаге по формуле из лекции 1 для полученного .

Формула вычисления безусловных вероятностей состояний смоделированной цепи на шаге для полученного имеет вид

Вычислим вектор при

matrix = np.linalg.matrix\_power(P, k)

p\_0\_T = np.transpose(p\_0)

p\_k = np.matmul(p\_0, matrix)

Получаем, что p\_k = [0.192488, 0.151150, 0.400411, 0.063766, 0.134770, 0.057415]

1. Смоделируем траекторий полученной цепи за шагов по приложенному алгоритму и выведем на печать несколько траекторий.

n = 180

path = [[0] \* k for i in range(n)]

vec = np.cumsum(P, axis=1)

for row in range(n):

    r\_0 = np.random.uniform(0, 1)

    if r\_0 <= r[0]:

        j\_k = 0

    elif r\_0 >= r[m - 2]:

      j\_k = m - 1

    else:

        for i in range(1, m - 1):

            if r[i-1] < r\_0 <= r[i]:

                j\_k = i

                break

    path[row][0] = j\_k + 1

    for col in range(1, k):

        r\_i = np.random.uniform(0, 1)

        if r\_i <= P[j\_k][0]:

            j\_k = 0

        else:

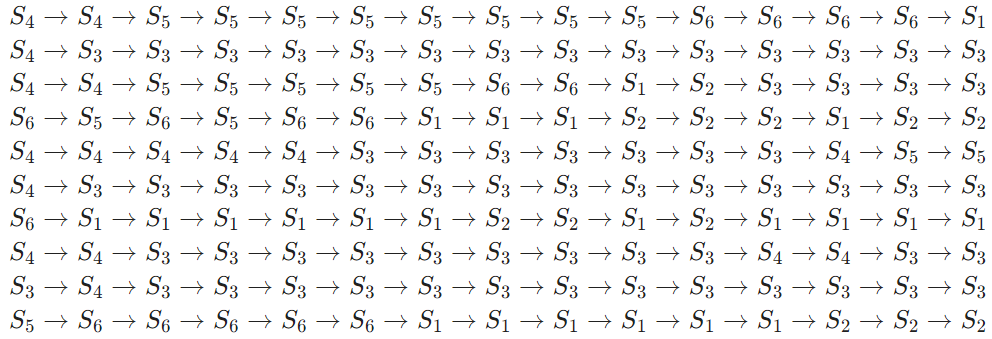
            for j in range(1, m):

                if vec[j\_k][j - 1] < r\_i <= vec[j\_k][j]:

                    j\_k = j

                    break

        path[row][col] = j\_k + 1

Первые 10 траекторий:  


1. По полученным реализациям траекторий найдите вектор эмпирических безусловных вероятностей состояний цепи на шаге.

Для этого подсчитаем число смоделированных траекторий, находящихся в состоянии на шаге и поделим на общее число траекторий :

final\_elements = [chain[k-1] for chain in path]

d = Counter(sorted(final\_elements))

df['Эмпирические вероятности'] = df['Количество траекторий на k-ом шаге'] / n

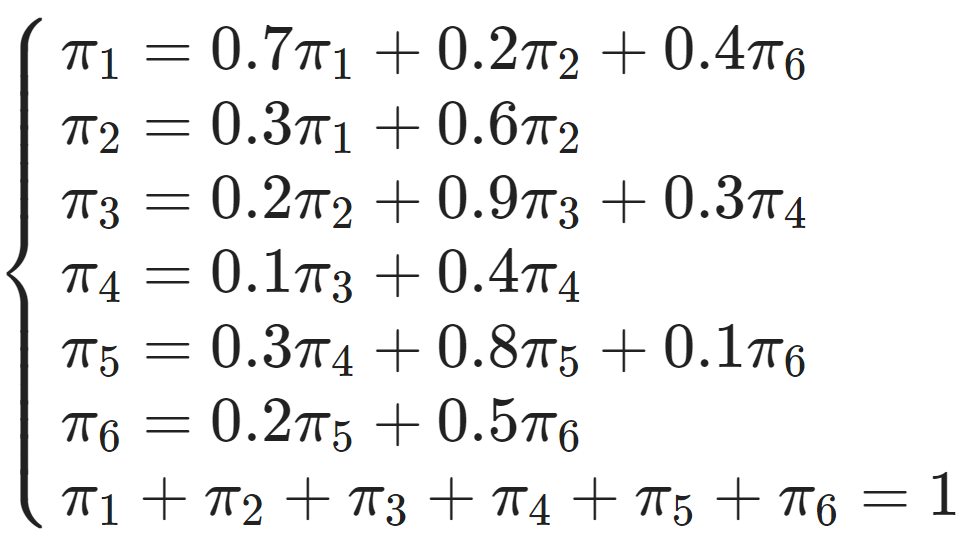
1. Сравним найденные эмпирические вероятности с теоретическими для шага.



1. Вычислим финальные вероятности для рассматриваемой Марковской цепи и сравним их c вероятностями состояний на шаге.

Для нахождения финальных вероятностей воспользуемся формулой:

Получим следующую систему уравнений:



Решая систему, получаем:

, , , , , .



**Вывод:** в процессе выполнения задания была найдена матрица переходных вероятностей, были вычислены безусловные вероятности состояний на 15 шаге, были смоделированы 180 траекторий с 15 шагами, были посчитаны теоретические, эмпирические и финальные вероятности. Значение теоретических вероятностей мало отличается от финальных, а эмпирические вероятности близки к теоретическим.